Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007

Vorgaben für das Fach Mathematik

1. Lehrpläne für die gymnasiale Oberstufe und Vorgaben für die schriftliche Abiturprüfung mit zentral gestellten schriftlichen Aufgaben

Grundlage für die zentral gestellten schriftlichen Aufgaben der Abiturprüfung in allen Fächern der gymnasialen Oberstufe sind die verbindlichen Vorgaben der Lehrpläne für die gymnasiale Oberstufe. Da die Lehrpläne vielfach keine hinreichenden Festlegungen bezogen auf die für eine Abiturprüfung mit zentral gestellten Aufgaben relevanten Inhalte enthalten, sind im Hinblick auf die schriftlichen Abiturprüfungen 2007 entsprechende inhaltliche Vorgaben für den Unterricht in der Qualifikationsphase erforderlich, deren Behandlung in den zentral gestellten Aufgaben vorausgesetzt wird.
Durch diese Schwerpunktsetzungen soll gesichert werden, dass alle Schülerinnen und Schüler, die im Jahr 2007 das Abitur ablegen, gleichermaßen über die notwendigen inhaltlichen Voraussetzungen für eine angemessene Bearbeitung der zentral gestellten Aufgaben verfügen.
Die Verpflichtung zur Beachtung der gesamten Obligatorik des Faches laut Lehrplan einschließlich der verbindlichen didaktischen Orientierungen des Faches bleibt von diesen inhaltlichen Schwerpunktsetzungen unberührt. Die Realisierung der Obligatorik insgesamt liegt in der Verantwortung der Lehrkräfte. Die zentral gestellten Aufgaben werden die übergreifenden verbindlichen Vorgaben der Lehrpläne angemessen berücksichtigen.

Die folgenden fachspezifischen Schwerpunktsetzungen gelten zunächst für das Jahr 2007. Sie stellen keine dauerhaften Festlegungen dar.

2. Verbindliche Unterrichtsinhalte im Fach Mathematik für das Abitur 2007

Unabhängig von den folgenden Festlegungen für das Abitur 2007 im Fach Mathematik gelten als allgemeiner Rahmen die obligatorischen Vorgaben des Lehrplans Mathematik in den folgenden Kapiteln:

- Kapitel 2: „Bereiche, Themen, Gegenstände" mit den Abschnitten 2.1 „Bereiche: Herleitung und didaktische Funktion" , 2.2 „Themen und Gegenstände" und 2.3 „Obligatorik und Freiraum"

Zugehöriger Auszug aus dem Lehrplan:

2. Bereiche, Themen, Gegenstände

Über die fachlich definierten Themen und Gegenstände hinaus werden in einem wissenschaftspropädeutisch geprägten Mathematikunterricht, der einer vertieften Allgemeinbildung verpflichtet ist, zahlreiche Fähigkeiten, Einsichten und Einstellungen vermittelt, die nicht allein in der Fachsprache beschrieben werden können. Was im Fach Mathematik im Verlauf der gymnasialen Oberstufe zu lernen ist, lässt sich drei Bereichen zuordnen.

2.1 Bereiche: Herleitung und didaktische Funktion

Der Unterricht soll so gestaltet werden, dass Aspekte aus allen drei Bereichen bei der Behandlung eines jeden Themas Berücksichtigung finden.

Bereich 1: Fachliche Inhalte

Die Aneignung von Begriffen, Lehrsätzen, Beweisen und Algorithmen lässt sich in einen fachsystematischen Zusammenhang stellen. Mathematik wird dabei als ein formales (deduktives) System betrachtet, wie es sich im Laufe einer langen historischen Genese herausgebildet hat und in dem sich mathematische Erkenntnis gleichsam kristallisiert.

Die Begriffe, Lehrsätze und Algorithmen, die im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe neu eingeführt werden, entstammen vor allem den Inhaltsbereichen Analysis, Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik.

Bereich 2: Lernen in Kontexten

Mathematik ist nicht nur ein formales System: Abstrakte mathematische Begriffe und Erkenntnisse lassen sich zum Ordnen, Strukturieren, Darstellen und Modellieren realer Zusammenhänge nutzen und gewinnen in ihnen eine konkrete Bedeutung.

Mathematik erschließt sich dem Verständnis von Lernenden in befriedigender Weise nur, wenn sie in möglichst vielfältigen Kontexten erfahren werden kann.

Insbesondere in den Grundkursen sollte die Auseinandersetzung mit Mathematik in realen Kontexten intensiviert werden. Dadurch können sie gegenüber den Leistungskursen ein ganz eigenes Profil gewinnen.

Bereich 3: Methoden und Formen selbstständigen Arbeitens

Auf der Seite der Schülerinnen und Schüler sind in der Auseinandersetzung mit der anstehenden Mathematik und den im Unterricht bzw. über Lehrbücher angebotenen Problemen eine Reihe von Kompetenzen zu erwerben, die sich zum Teil direkt auf das Verstehen und den Umgang mit Mathematik beziehen, teilweise darüber hinausgehende Schlüsselqualifikationen betreffen. Die Lernenden erschließen eigenständig Informationsquellen, gehen heuristisch und systematisch an Probleme heran, dokumentieren ihre Arbeitsschritte, überprüfen selbstkritisch Ergebnisse, diskutieren und präsentieren sie. Schülerinnen und Schüler üben sich in ein zunehmend selbstständiges und eigenverantwortliches Arbeiten wie auch in kooperative Vorgehensweisen ein, sie erschließen projektartige und fächerverbindende Aktivitäten.

2.2 Themen und Gegenstände

Jahrgangsstufe 11

Für die Jahrgangsstufe 11 sind Koordinatengeometrie, Beschreibende Statistik und Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen vorgesehen. Sie knüpfen an die Standards für den mittleren Schulabschluss an und führen in die Gebiete ein, die in der Qualifikationsphase unterrichtet werden. Nachfolgend sind die Unterrichtsthemen und -gegenstände stichwortartig aufgeführt und anschließend erläutert. **Die aufgelisteten Inhalte sind verbindlich.** Die Zusammenstellung ist äußerst kurz gehalten, um den Schulen einen möglichst weiten Raum für die Gestaltung des Unterrichts zu eröffnen. Daher ergibt sich bei Beschränkung auf diese Inhalte keine vollständige Lernsequenz. **Ausweitungen, Akzentuierungen und Vertiefungen sind erforderlich.**

Koordinatengeometrie
- Gerade, Parabel, Kreis
- Kreistangente, Parabeltangente
- Lineare Gleichungssysteme zur Bestimmung von Geraden und Parabeln.

Die Koordinatengeometrie knüpft an Inhalte des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I an. Sie bereitet auf Kernprobleme der Differentialrechnung vor und stellt Hilfsmittel für die Analysis zur Verfügung. Die zentralen Ideen des Messens, des funktionalen Zusammenhangs und des mathematischen Modellierens können deutlich werden.

Bei Geraden und Parabeln sollten Anwendungen Berücksichtigung finden. Scheitelpunktsbestimmungen können Optimierungsprobleme lösen helfen. Schnittprobleme zwischen Geraden und Parabeln bzw. Kreisen eröffnen unterschiedliche Zugänge zum Tangentenbegriff. Auch die systematische Behandlung linearer Gleichungssysteme in den Jahrgangsstufen 12 bis 13 kann vorbereitet werden. Schließlich ermöglicht die Koordinatengeometrie eine immanente Wiederholung wichtiger Themen aus der Sekundarstufe I (z. B. Koordinatensystem, Geradengleichung, Lösung quadratischer Gleichungen, Rechnen mit Quadratwurzeln, Anwendungen der Satzgruppe des Pythagoras und der Strahlensätze sowie der trigonometrischen Funktionen).

Beschreibende Statistik

- Erfassen, Darstellen und Aufbereiten statistischer Daten
- Statistische Kenngrößen (Mittelwerte, Streuungsmaße)
- Interpretieren und Bewerten von Kenngrößen
- Ausgleichsgerade, Regression, Korrelation.

In vielen Bereichen des täglichen Lebens und in fast allen Wissenschaften spielen Statistiken eine wichtige Rolle. Aufgabe des Mathematikunterrichts ist es, dass Schülerinnen und Schüler lernen, mit großen und unübersichtlichen Datenmengen vernünftig umzugehen, sie durch Kenngrößen zu charakterisieren und diese zu interpretieren. Beim Umgang mit Daten, Diagrammen und Graphen, soll die Kritikfähigkeit der Lernenden entwickelt werden.

Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

- Mittlere Änderungsrate, durchschnittliche Steigung, Sekante, Differenzenquotient
- Momentane Änderungsrate, lokale Steigung, Tangente, Grenzprozess des Differenzenquotienten
- Ableitung und Ableitungsfunktion, Tangentengleichung
- Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen
- Untersuchung ganzrationaler Funktionen bzgl. Nullstellen, Symmetrie, Steigungsverhalten/Hoch- und Tiefpunkte, Krümmungsverhalten/Wendepunkte.

In der Differentialrechnung tritt bei der Erarbeitung von Gesetzmäßigkeiten die zentrale Idee des funktionalen Zusammenhangs in den Vordergrund.

Historisch gesehen hat sich die Analysis über weite Strecken gemeinsam mit der Physik entwickelt. Die tägliche, subjektive Erfahrung von Geschwindigkeit und Beschleunigung machen die entsprechenden Begriffe zu einer idealen Grundlage für eine beziehungshaltige Entwicklung des Ableitungsbegriffs.

Die in der Analysis untersuchten Funktionen werden in zahlreichen Fächern zur Beschreibung von Abhängigkeiten benutzt. Grundgedanke der Differentialrechnung ist das Untersuchen und Berechnen von Änderungen (durchschnittliche, momentane Änderungsrate) und von Steigungen (Sekanten- und Tangentensteigung). Der darauf aufbauende Ableitungsbegriff bildet die mathematische Basis für zahlreiche Begriffsbildungen in anderen Fächern.

Die Analysis wird in dem vorliegenden Lehrplan auf alle Jahrgangsstufen der gymnasialen Oberstufe aufgeteilt. Die Behandlung im Grundkurs der Jahrgangsstufe 11 stellt die gemeinsame Grundlage für die Weiterführung in Grund- und Leistungskursen der Qualifikationsphase dar.

Jahrgangsstufen 12 und 13

Beschrieben sind nachfolgend die drei in den von der KMK beschlossenen „Einheitlichen

Prüfungsanforderungen" (EPA) ausgeführten Gebiete Analysis, Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik.

Analysis

In Fortsetzung des Analysisunterrichts der Jahrgangsstufe 11 wird exemplarisch gezeigt, wie ganzrationale Funktionen zur Modellierung genutzt werden können. Funktionen weiterer Funktionenklassen (trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktionen) werden unter dem Aspekt ausgewählt, welche Bedeutung sie in Modellbildungsprozessen haben.

Im Zeitalter graphikfähiger Rechner haben die Untersuchungen zum Steigungsverhalten von Funktionen und die Behandlung von Kriterien für relative Extrema und für Wendepunkte an Bedeutung nicht verloren, soweit sie darauf abzielen, den Zusammenhang zwischen der Ausgangsfunktion und den Ableitungsfunktionen zu entwickeln. Untersuchungen von Funktionen als Routineverfahren mit dem Ziel, schnell einen qualitativen Überblick über den Verlauf eines Graphen zu bekommen, sind weitgehend fragwürdig geworden.

In der Integralrechnung geht es z. B um die Fragestellung, welche Wirkung die Wasserzulaufgeschwindigkeit auf das Wasservolumen einer Talsperre hat. In diesem Sinne steht in der Integralrechnung die Untersuchung von Wirkungen im Vordergrund. Dieser Vorstellung wird eine Beschränkung der Integralrechnung auf die Berechnung von Flächeninhalten nicht gerecht, auch wenn der Inhalt der Fläche zwischen Graph und x-Achse ein in vielen Anwendungssituationen tragfähiges anschauliches Modell liefert. Es sollte deutlich werden, dass der Integralbegriff Grundlage vieler Begriffsbildungen in anderen Fächern ist.

Die umfangreichen Aufgabensammlungen in der Analysis bieten den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, mit einem fast unerschöpflichen Übungsmaterial selbstverantwortlich üben zu lernen. Die von ihnen dabei erfahrenen Lernprobleme können in den unterschiedlichsten Unterrichtsformen aufgearbeitet werden.

Grundkurs Analysis

Die Analysis im Grundkurs bekommt Bedeutung in beziehungshaltigen Problemsituationen, die einer mathematischen Modellbildung zugänglich sind.

Werden neue Begriffe und Verfahren aus Anwendungssituationen gewonnen, so erscheint es durchaus sinnvoll, im Sinne einer didaktischen Reduktion die Anwendungssituationen durch Vereinfachung des Zahlenmaterials zunächst zu idealisieren.

Wie umfangreich Begriffe durchgearbeitet werden müssen, um bei Schülerinnen und Schüler eine solide Vorstellung von den zu Grunde liegenden fachlichen Gegenständen und Algorithmen zu entwickeln, ist stark von der Leistungsfähigkeit der Lerngruppe abhängig. Auf alle Fälle muss darauf geachtet werden, dass auch Schülerinnen und Schüler mit formalen Schwächen die Gelegenheit bekommen, sich angemessen an der gedanklichen Entwicklung des Unterrichts zu beteiligen. Voraussetzung dazu ist, neben der formalen Fachsprache im Unterricht auch eine angemessene Umgangssprache zu pflegen.

Insbesondere im Grundkurs ist es oft nicht sinnvoll, Sachverhalte zu beweisen, die den Schülerinnen und Schülern offensichtlich sind. Innermathematische Vernetzungen (z. B. der Wachstumsvergleich von Exponentialfunktionen und ganzrationalen Funktionen), angemessene Modellierungen (z. B. Beschreibung spezieller Wachstumsmodelle), Plausibilitätsbetrachtungen (z. B. Vergleich einer Wertetabelle für Sekantensteigungen der Sinusfunktion mit einer Wertetabelle der Kosinusfunktion) sind einer ausschließlich formalen Behandlung vorzuziehen.

Fortführung der Differentialrechnung

- Bestimmung ganzrationaler Funktionen in Sachzusammenhängen

- Untersuchung weiterer Funktionenklassen, benötigte Ableitungsregeln
- Extremwertprobleme.

Integralrechnung
- Produktsummen, Untersuchung von Wirkungen
- Stammfunktion, bestimmtes Integral, Eigenschaften bestimmter Integrale
- Integralfunktion, Hauptsatz (mit anschaulichem Stetigkeitsbegriff)
- Flächenberechnung durch Integration
- ein Verfahren zur numerischen Integration.

Leistungskurs Analysis

Der Analysisunterricht im Leistungskurs kann in der Regel auf einem deutlich sichereren Umgang mit mathematischen Symbolen und Formalismen aufbauen. Anwendungsprobleme dürfen im Leistungskurs komplexer werden. Gleichzeitig bekommt die Fachsystematik eine größere Bedeutung.

Die Überprüfung des eigenen Lösungsweges und der eigenen Lösung wird zunehmend schwieriger. Schülerinnen und Schüler müssen kritisch abschätzen lernen (z. B. durch Plausibilitätsbetrachtungen), ob die eigene Lösung eine stimmige Antwort auf das Problem sein kann.

Grenzwerte begegnen den Schülerinnen und Schülern u. a. bei einer Präzisierung des Steigungsbegriffs, beim Integralbegriff und bei uneigentlichen Integralen. An mindestens einer Stelle sollte der Grenzwertbegriff so vertieft werden, dass die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt werden, Grenzwerte auch im Sinne eines formalen Beweises zu untersuchen.

Fortführung der Differentialrechnung
- Bestimmung ganzrationaler. Funktionen in Sachzusammenhängen
- Ableitungsregeln (Produkt-, Quotienten-, Kettenregel, Ableitung der Umkehrfunktion)
- Untersuchung von Exponentialfunktionen und weiteren Funktionenklassen
- Untersuchung von Funktionenscharen
- Extremwertprobleme.

Integralrechnung
- Produktsummen, Untersuchung von Wirkungen
- Stammfunktion, Integrierbarkeit, bestimmtes Integral, Eigenschaften bestimmter Integrale
- Integralfunktion, Hauptsatz
- Zusammenhang Integrierbarkeit - Stetigkeit - Differenzierbarkeit
- Beziehungen zwischen Ableitungs- und Integrationsregeln
- Flächenberechnung durch Integration
- ein Verfahren zur numerischen Integration
- Uneigentliche Integrale.

Lineare Algebra/Geometrie

In der Linearen Algebra stehen die zentralen Ideen des räumlichen Strukturierens, des Modellierens und des funktionalen Zusammenhangs im Vordergrund.

Das räumliche Strukturieren erhält eine neue Qualität dadurch, dass die Beschränkung auf die Koordinatengeometrie aufgehoben wird und Vektoren als eigenständige mathematische Objekte zur effizienten Behandlung räumlicher Probleme benutzt werden.

Die Idee des Modellierens kann bei den verschiedenen Anwendungen der Matrizenrechnung in Sachzusammenhängen vertieft werden. Bei der Benutzung von Matrizen zur Realisierung geometrischer Abbildungen tritt der funktionale Zusammenhang in den Vordergrund.

Heutzutage ist es alltäglich, dass Körper im Computer modelliert und bewegt werden (z. B. Bildschirmschoner). Dabei werden Abbildungen wie Spiegelung, Drehung, Skalierung/ zentrische Streckung im Anschauungsraum durch Matrizen repräsentiert. Es entsteht das Problem, dreidimensionale Gebilde in eine Ebene zu projizieren. Die entsprechenden Projektionsverfahren der darstellenden Geometrie können nicht vollständig thematisiert, aber kursspezifisch exemplarisch behandelt werden. Alternativ können auch stochastische Matrizen und Übergangsprobleme bei Aufgaben aus der Wirtschaftsmathematik behandelt werden.

Matrizen sind als Werkzeug der Linearen Algebra in vielen mathematischen und außermathematischen Anwendungen von großer Bedeutung. Sie können im Unterricht schon frühzeitig als Objekte eingeführt werden, die eine einfache und systematische Behandlung linearer Gleichungssysteme erleichtern, und dann später als Abbildungsvorschriften für Vektoren erkannt und behandelt werden.

Die Behandlung der vektoriellen analytischen Geometrie muss zeitlich so organisiert werden, dass die Schülerinnen und Schüler den Umgang mit Matrizen kennen lernen.

Grundkurs Lineare Algebra/Geometrie

Bei der Behandlung der Vektorrechnung ist zu beachten, dass die geometrische Anschauung in besonderem Maße Basis und Quelle der Intuition ist und nicht durch nur schematische Aneignung der Verfahren der Vektorgeometrie in den Hintergrund gedrängt werden darf.

Immer wieder tritt das Problem auf, dreidimensionale Objekte in der Zeichenebene darzustellen. Wenn das Kapitel Matrizen mit der Alternative 1 Abbildungen gewählt wird, soll exemplarisch eine schräge Parallelprojektionen (wie Kavalierprojektion oder Militärprojektion) behandelt werden. Wird stattdessen die zweite Alternative Übergangsmatrizen eingeführt, so beschränkt man sich sinnvollerweise auf eine intuitive Behandlung von Schrägbildern bei der Vektorrechnung.

Lineare Gleichungssysteme und vektorielle Geometrie

- lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise systematisches Lösungsverfahren von linearen Gleichungssystemen Lösung unterbestimmter linearer Gleichungssysteme
- Rechnen mit Vektoren
  Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
  Koordinatenform von Ebenengleichungen
  Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
- Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren.

Matrizen (Alternative 1)

- Abbildungsmatrizen, schräge Parallelprojektion
- Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung.

Matrizen (Alternative 2)

- Übergangsmatrizen, Materialverflechtung oder stochastische Matrizen
- Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen.

Leistungskurs Lineare Algebra/Geometrie

Lineare Abhängigkeit, Basis, Dimension, Erzeugendensysteme sollen stets auf einem anschaulichen Verständnis aufbauend als mathematische Strukturen in propädeutischer Weise eingeführt werden.

Abstandsprobleme eignen sich besonders, unterschiedliche Lösungsverfahren einzusetzen und zu vergleichen. Wenngleich es nicht zu den obligatorischen Themen gehört, kann dabei auch das Vektorprodukt als zweite Vektorverknüpfung eingeführt werden. Dafür sprechen nicht nur die elegante Behandlung von Abstandsberechnungen, sondern auch die physikalische Bedeutung und strukturmathematische Aspekte.

Oft tritt die Notwendigkeit auf, räumliche Objekte in der Zeichenebene darzustellen. Exemplarisch können neben schrägen auch senkrechte Parallelprojektionen behandelt und durch Matrizenoperationen realisiert werden.

Die Behandlung inverser Matrizen geschieht sowohl unter dem Aspekt der Abbildung als auch unter dem des Algorithmus. Die Verknüpfung von Abbildungen durch Matrizenmultiplikation eröffnet Möglichkeiten, strukturmathematische Aspekte zu behandeln, z. B. zu untersuchen, welche Matrizen bei Multiplikation eine Gruppe bilden.

Eigenwerte von Matrizen und ihre geometrische Deutung als Achsenstreckungen liefern eine Verbindung von algebraischen und geometrischen Aspekten. Mit Hilfe der Eigenwerte können in einfachen Fällen Abbildungen (z. B. Spiegelungen, Drehungen, Projektionen) aus ihrer Matrixdarstellung identifiziert werden. Determinanten sind in diesem Zusammen-hang Kenngrößen linearer Abbildungen und beschreiben deren Deformationsgrad.

Alternativ können auch Übergangsmatrizen zur Modellierung von Wirtschaftsproblemen oder zur Simulation biologischer Fragestellungen eingesetzt werden. Von besonderer Bedeutung sind stochastische Übergangsmatrizen. Die Untersuchung der Existenz von Grenzverteilungen und stationären Verteilungen kann zur Behandlung von Markov-Ketten weiterführen und damit eine Verbindung zur Stochastik herstellen. Dabei ergibt sich automatisch die Notwendigkeit der fortgesetzten Multiplikation und der Invertierung von Matrizen.

Lineare Gleichungssysteme und vektorielle Geometrie

- lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise
  systematisches Lösungsverfahren von linearen Gleichungssystemen
  Lösung unterbestimmter linearer Gleichungssysteme
- Rechnen mit Vektoren
  Lineare Abhängigkeit, Basis, Dimension, Erzeugendensysteme
  Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
- Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
- Normalenformen von Ebenengleichungen
  Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen, Schnittwinkel von Geraden und Ebenen
  Abstandsprobleme.

Matrizen (Alternative 1)

- Abbildungsmatrizen, Parallelprojektionen
- Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung, inverse Matrizen und Abbildungen
- Gruppenstruktur bzgl. der Matrizenmultiplikation
- Eigenwertprobleme.

Matrizen (Alternative 2)

- Übergangsmatrizen, stochastische Matrizen
- Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen
- Gruppenstruktur bzgl. der Matrizenmultiplikation
- Fixvektoren, stationäre Verteilung.

Stochastik

In der Stochastik steht die Idee der Wahrscheinlichkeit im Zentrum des Unterrichts. Bei der Bearbeitung realer Probleme ist der Modellbildungsaspekt von besonderer Wichtigkeit. Ansatzüberlegungen müssen offen gelegt, Resultate diskutiert und bewertet werden.

Grundlegendes über Wahrscheinlichkeiten, Zufallsschwankungen und den Umgang mit großen Datenmengen haben Schülerinnen und Schüler schon in der Sekundarstufe I und in der Jahrgangsstufe 11 kennen gelernt. An diese Vorkenntnisse gilt es anzuknüpfen. In den Jahrgangsstufen 12 und 13 wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgebaut und grundlegende Fragestellungen der Beurteilenden Statistik rücken ins Zentrum des Interesses. Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass Wahrscheinlichkeitsüberlegungen dazu beitragen können, rationale Prognosen zu erstellen und Entscheidungshilfen zu geben. Sie sollen lernen, statistische Aussagen zu verstehen, kritisch zu würdigen und in ihrer Tragweite abzuschätzen. Da Elemente einer vertieften Allgemeinbildung vermittelt werden, dient dies sowohl der Lebens- als auch der Studienvorbereitung für alle empirischen Wissenschaften.

Die Begriffe des Erwartungswerts und der Standardabweichung wurden in der Beschreibenden Statistik vorbereitet und können übertragen werden. Der Satz von Bayes eröffnet interessante Problemstellungen mit oft überraschenden Ergebnissen. Als einfachste Verteilung ist die Binomialverteilung für Grund- und Leistungskurs obligatorisch.
Das Schätzen von Parametern und das Testen von Hypothesen sind zentrale Aufgaben der Beurteilenden Statistik. Bei der Beschäftigung mit stochastischen Fragestellungen werden Vermutungen in Form von Hypothesen formuliert. Deren Gültigkeit wird innerhalb vorgegebener Grenzen überprüft, die Sicherheit möglicherweise durch ergänzende Untersuchungen erhöht.

Schülerinnen und Schülern können in der Stochastik besonders gut selbstständig arbeiten. Durchführen eigener Untersuchungen, Erheben von Daten, Auswerten von Texten aus Büchern oder Zeitungen, Übernehmen von Informationen aus dem Internet, Dokumentieren der Arbeitsschritte, kritisches Überprüfen, Diskutieren und gegebenenfalls Präsentieren der Resultate bieten sich an.

Grundkurs Stochastik

Im Grundkurs ist eine eher „praktische" Art der Beschäftigung mit stochastischen Fragestellungen angezeigt. Es empfiehlt sich, die Thematik in inhaltlichen Kontexten anzusprechen. Alltagssituationen aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler können aufgegriffen, an konkreten Fragestellungen, Experimenten und kleinen Projekten kann die Theorie beispielhaft entwickelt werden. So tritt nicht nur das Spannungsfeld Modell - Realität deutlich hervor, sondern es besteht auch eine Chance, dass bei den Schülerinnen und Schülern eine positive Einstellung zur Mathematik gefördert wird.
Die Binomialverteilung kann bei umfangreichen Grundgesamtheiten als Näherung für die hypergeometrische Verteilung verwendet werden, das „Ziehen ohne Zurücklegen" wird durch das „Ziehen mit Zurücklegen" ersetzt. Auf der anderen Seite wird die Binomialverteilung selbst durch die Normalverteilung angenähert, wenn die Laplace-Bedingung erfüllt ist. Mit Hilfe der Sigma-Regeln erhält man im Grundkurs überschaubare Lösungswege beim Testen von Hypothesen (Alternative 1) oder beim Schätzen von Parametern (Alternative 2).

Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Wahrscheinlichkeit
- Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
- Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert, Standardabweichung
- Binomialverteilung.

Beurteilende Statistik (Alternative 1)

- Testen von Hypothesen.

Beurteilende Statistik (Alternative 2)

- Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen.

Leistungskurs Stochastik

Zentrale Inhalte des Leistungskurses lassen sich über eine intensive Behandlung der Binomialverteilung gut erschließen. Interessante Aspekte bieten die Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung sowie die Verwendung der Normalverteilung für die Binomialverteilung bei großem Stichprobenumfang. Eventuell kann zusätzlich die Poissonverteilung thematisiert werden.

Verbindlich ist die Verknüpfung der Stochastik mit einem der beiden anderen Gebiete. Der Bezug zur Analysis kann über die Betrachtung stetiger Verteilungen erfolgen, der zur Linearen Algebra mittels stochastischer Matrizen und Markovprozesse. In beiden Fällen sind Approximations- und Grenzwertaspekte von Bedeutung.

Modellierungen erfassen im Leistungskurs auch komplexere Sachverhalte. Sind verschiedene Ansätze möglich, so sollten sie konkret erläutert und miteinander verglichen werden. Von besonderem Wert sind Fehlerbetrachtungen sowie die Bewertung von Ergebnissen unter Berücksichtigung der jeweils gewählten Modellannahmen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Wahrscheinlichkeit
- Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Satz von Bayes
- Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert, Standardabweichung
- Binomialverteilung
- Normalverteilung, Formeln von de Moivre-Laplace.

Beurteilende Statistik

- Testen von Hypothesen
- Schätzen von Parametern.

Verknüpfung der Stochastik mit Analysis oder Linearer Algebra

- Verknüpfung der Stochastik mit der Analysis über stetige Zufallsgrößen oder mit der Linearen Algebra über stochastische Matrizen/Markovketten.

2.3 Obligatorik und Freiraum

Für die Jahrgangsstufe 11 sind in Kapitel 2.2 die Gebiete Koordinatengeometrie, Beschreibende Statistik und Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen ausgewiesen. **Die dort genannten Inhalte sind verpflichtend.** Die Gebiete sollen in geeigneter Weise miteinander verknüpft werden. Es ist darauf zu achten, dass wichtige Unterrichtsinhalte der Sekundarstufe I in integrierenden Wiederholungen aufgegriffen und so aktuell verfügbar gehalten werden.

Für die Auswahl der Unterrichtsinhalte aus den für die Jahrgangsstufen 12 und 13 vorgesehenen drei Gebieten Analysis, Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik gelten folgende Grundsätze:

- In allen drei Gebieten Analysis, Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik sollen die Schülerinnen und Schüler Orientierungswissen erwerben. Dabei sollen insbesondere zentrale Ideen und fachliche Zusammenhänge deutlich werden.
- Für die Abiturprüfung ist Analysis verpflichtend sowie mindestens eines der Gebiete

Lineare Algebra/Geometrie oder Stochastik. Damit ein angemessenes Abiturniveau erreicht wird, sind alle aufgelisteten Inhalte der abiturrelevanten Gebiete so zu behandeln, dass die Schülerinnen und Schüler damit sachgerecht umgehen können. Dabei ist es keineswegs notwendig, jeden Unterrichtsinhalt mit gleicher Intensität und Ausführlichkeit zu behandeln.
- Werden neben Analysis beide Gebiete Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik im Abitur berücksichtigt, so ist aus den Inhalten eine geeignete Auswahl zu treffen.

Obligatorisch ist nicht nur die Behandlung der benannten fachsystematischen Inhalte, sondern auch, wie im Sinne einer Vorbereitung auf selbstständiges wissenschaftliches Arbeiten mit den mathematischen Inhalten umgegangen wird. Dazu gehört insbesondere:
- die selbstständige Beschaffung von Informationen; dies betrifft sowohl Informationen fachsystematischer Art aus Lehrbüchern oder anderen mathematischen Texten als auch Informationen über Sachzusammenhänge in „mathematikhaltigen" Kontexten
- die Analyse, Strukturierung und Interpretation von Daten, die im Kontext von Sachzusammenhängen oder in Graphiken, Zeichnungen, Tabellen, Diagrammen usw. vorgegeben sind
- die Dokumentation von Arbeitsprozessen (insbesondere auch in kooperativen Arbeitsformen) und die Präsentation der Ergebnisse, die diskursive Auseinandersetzung über die eigene Arbeit mit den Mitschülerinnen und Mitschülern
- die Arbeit mit mathematischen Modellen in fachübergreifenden Kontexten
- der Einsatz von Informations- und Kommunikationstechnologien als Hilfsmittel zur Erarbeitung und Darstellung von mathematischen Methoden und Lösungswegen.

Kapitel 5: „Die Abiturprüfung" mit den Abschnitten 5.2 „Beschreibung der Anforderungsbereiche" und 5.3.1 „Aufgabenarten der schriftlichen Abiturprüfung".

Zugehöriger (gekürzter) Auszug aus dem Lehrplan:

5.2 Beschreibung der Anforderungsbereiche

In der Abiturprüfung sollen die Kenntnisse und Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler möglichst differenziert erfasst. werden. Hierbei sind die mit den Aufgaben verbundenen Erwartungen drei Anforderungsbereichen zuzuordnen, die im Folgenden beschrieben sind.

Anforderungsbereich I

Der Anforderungsbereich I umfasst
- die Wiedergabe von Sachverhalten (z. B. Daten, Fakten, Regeln, Formeln, Aussagen) aus einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang
- die Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang.

Dazu kann gehören:
- Wiedergeben von Definitionen und Sätzen
- Wiedergeben eines im Unterricht ausführlich besprochenen und wiederholten einfachen Beweises
- Anfertigen von Skizzen und Funktionsgraphen auf eine im Unterricht behandelte Weise
- Ausführen von geübten Algorithmen
- Lösen von einfachen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen nach eingeübtem Verfahren
- Bestimmen von Ableitungsfunktionen nach gelernten und eingeübten Regeln
- Bestimmen der Extremwerte einer Funktion in Fällen, in denen das eingeübte Verfahren unmittelbar zum Ziel führt

- Berechnen bestimmter Integrale von ganzrationalen Funktionen
- Feststellen der Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden oder Ebenen mit Hilfe eines einfachen, durch Übung vertrauten Verfahrens
- Bestimmen von Geraden- und Ebenengleichungen bei Vorgabe einfacher und gewohnter Bedingungen
- Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten in einfachen, vom Unterricht her vertrauten Zusammenhängen.

Anforderungsbereich II

Der Anforderungsbereich II umfasst
- selbstständiges Auswählen,' Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang
- selbstständiges Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen gehen kann.

Dazu kann gehören:
- verbales, nicht schematisches Darstellen von Begründungen oder Zusammenhängen bei bekannten Sachverhalten
- Durchführen von Beweisschritten, bei denen eine selbstständige Rekonstruktion von Gedankengängen erforderlich ist
- Ausführen eines Beweises, wenn ähnliche Beweise im Unterricht in vergleichbaren Zusammenhängen durchgeführt wurden
- Anwenden von Begriffen (z. B. Grenzwert, Basis, Zufallsgröße) in Beispielen, die nicht vom Unterricht her bekannt, in ihrer Struktur aber einfach sind
- Untersuchen von Funktionen mit Methoden, die von anderen Funktionenklassen her bekannt sind
- Berücksichtigen von Fallunterscheidungen bei der Untersuchung von Funktions-scharen, wenn Überlegungen dieser Art aus dem Unterricht vertraut sind
- Entwickeln von Funktionsgraphen aus Untersuchungsergebnissen, sofern die Gestalt nicht durch Übungen bereits vertraut ist
- Integrieren mit Hilfe von Substitution oder partieller Integration in vom Typ her bekannten Fällen
- Bestimmen von Funktionen aus vorgegebenen Bedingungen
- Erkennen und Verwenden von Nebenbedingungen bei Extremwertaufgaben in einer vom Unterricht her bekannten Form
- Bestimmen von Geraden- und Ebenengleichungen, wobei die die Geraden oder Ebenen bestimmenden Punkte oder Richtungen erst aus anderen Bedingungen erschlossen werden müssen
- bei Aufgaben aus der Stochastik realitätsbezogene Situationen analysieren und in gewohnter Weise auf ein stochastisches Modell beziehen
- Testen von Hypothesen nach vorgegebenen, geübten Methoden.

Anforderungsbereich III

Der Anforderungsbereich III umfasst planmäßiges Verarbeiten komplexer Gegebenheiten mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Begründungen, Wertungen zu gelangen. Dabei werden aus den gelernten Methoden oder Lösungsverfahren die zur Bewältigung der Aufgabe geeigneten selbstständig ausgewählt oder einer neuen Problemstellung angepasst.

Dazu kann gehören:
- Umsetzen eines in der Aufgabenstellung umgangssprachlich beschriebenen umfangreicheren Sachverhalts in die Form von Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssystemen o. Ä., ohne dass unmittelbar vergleichbare Aufgaben behandelt wurden
- Auffinden eines Lösungsansatzes für Probleme, bei denen Kenntnisse aus verschiedenen

Teilgebieten der Mathematik verbunden werden müssen, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde

- Verallgemeinern eines Sachverhalts, der nur von Beispielen her bekannt ist
- Erkennen und Begründen, ob die Übertragung eines Sachverhalts auf einen neuen oder erweiterten Bereich möglich ist
- Auffinden und Formulieren einer Vermutung, die sich für den Prüfling aus der Bearbeitung einer Teilaufgabe oder aus dem Vergleich mehrerer Teilaufgaben ergibt
- Ausführen eines Beweises, zu dem eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind
- Interpretieren von Ergebnissen in nicht vom Unterricht her bekannten Zusammenhängen
- Verwenden komplexer Begriffe (z. B. Differenzierbarkeit, lineare Unabhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit) in Beispielen, die nicht vom Unterricht her bekannt sind, unter Benutzung einer formalen Definition
- Berechnen eines Integrals, dessen Typ im Unterricht nicht behandelt wurde, mit Hilfe von bekannten, jedoch selbstständig auszuwählenden Methoden.

5.3.1 Aufgabenarten der schriftlichen Abiturprüfung

Für die schriftliche Abiturprüfung wird keine thematisch geschlossene Gesamtaufgabe gestellt. Zu bearbeiten sind vielmehr zwei bzw. drei voneinander unabhängige Aufgaben. Diese sollen sich in ihrer Gesamtheit auf alle drei in Kapitel 5.2 beschriebenen Anforderungsbereiche erstrecken. Die Aufgaben erreichen dann ein angemessenes Niveau, wenn das Schwergewicht der zu erbringenden Prüfungsleistung im Anforderungsbereich II liegt und daneben die Anforderungsbereiche I und III berücksichtigt werden, und zwar Anforderungsbereich I in deutlich höherem Maße als Anforderungsbereich III.

Zur Aufgabenkonstruktion seien folgende Grundsätze genannt:

- In jedem Abiturvorschlag müssen wenigstens zwei Gebiete berücksichtigt werden. Analysis muss eines dieser Gebiete sein.
- Die Aufgaben müssen eindeutig formuliert, klar umgrenzt und in der vorgesehenen Zeit zu bearbeiten sein. Sie dürfen einer bereits bearbeiteten Aufgabe nicht so nahe stehen oder im Unterricht so vorbereitet sein, dass ihre Bearbeitung keine selbstständige Leistung erfordert.
- Wegen der geringen Zahl der Aufgaben einer Prüfungsarbeit müssen diese in mehrere Teilaufgaben gegliedert werden., Die Teilaufgaben müssen in einem Problemzusammenhang stehen. Gegebenenfalls kann die Nennung eines Zwischenergebnisses oder einer Varianten eines Teilresultats erforderlich sein, um so die Voraussetzungen für die Lösung weiterer Teilaufgaben zu schaffen. Die Aufgliederung in Teilaufgaben und die Angabe von Zwischenergebnissen darf nicht so detailliert sein, dass die Selbstständigkeit der Bearbeitung nicht mehr gewährleistet ist.
- Die Forderung nach Selbstständigkeit der Leistung ist so einzubringen, dass dadurch ein Grunderfolg nicht beeinträchtigt wird. Das kann durch geeignete Abfolge der Teilaufgaben erreicht werden. Schwierige Teilaufgaben sollten nicht als solche gekennzeichnet werden.
- Die Aufgaben eines jeden Abiturvorschlags sollen in der Regel etwa gleiches Gewicht besitzen.

Auf der Grundlage der Obligatorik des Lehrplans Mathematik werden in den Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung im Jahr 2007 die folgenden Unterrichtsinhalte vorausgesetzt:

2.1 Inhaltliche Schwerpunkte

- **Analysis**

Fortführung der Differentialrechnung
Akzente für den Grundkurs:

- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen (mit CAS einschließlich Funktionenscharen) und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen

Akzente für den Leistungskurs:

- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen

Integralrechung
Akzente für den Grundkurs:

- Untersuchungen von Wirkungen
- Flächenberechnung durch Integration

Akzente für den Leistungskurs:

- Untersuchungen von Wirkungen
- Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
- Flächenberechnung durch Integration

- **Lineare Algebra/Geometrie**

Akzente für den Grundkurs:

lineare Gleichungssysteme für n>2, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

Alternative 1: Abbildungsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung oder
Alternative 2: Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

Akzente für den Leistungskurs:

lineare Gleichungssysteme für n>2, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden und Ebenengleichungen
Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
Abstandsprobleme (Abstand Punkt-Ebene)

Alternative 1: Abbildungsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung, inverse Matrizen und Abbildungen, Eigenwerte und Eigenvektoren oder
Alternative 2: Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen, Fixvektoren

- **Stochastik**

Akzente für den Grundkurs:

Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit

Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und
Standardabweichung - einseitiger Hypothesentest

Akzente für den Leistungskurs:

Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2.2 Medien/Materialien

----

3. Bearbeitungszeit für die schriftliche Abiturprüfung

Es gelten die Vorgaben der APO-GOSt § 32 Abs. 2.

4. Hilfsmittel

Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit) oder
CAS (Computer-Algebra-System)
Mathematische Formelsammlung
Deutsches Wörterbuch

Wegen des großen und sich ständig weiter entwickelnden Spektrums der Möglichkeiten programmierbarer und/oder grafikfähiger Taschenrechner kann bei dem Hilfsmittel Taschenrechner nicht weiter differenziert werden. Aufgabenstellungen für die Bearbeitung mit einem Taschenrechner, also ohne CAS, werden für das Abitur 2007 so gestaltet, dass die Benutzung eines programmierbaren und/oder grafikfähigen Taschenrechners keine Vorteile ergibt oder bei der Bewertung berücksichtigt wird.

5. Hinweise zur Aufgabenauswahl (Lehrkräfte, Schülerinnen/Schüler)

- Die Schule erhält für Grundkurs und Leistungskurs insgesamt vier Aufgabensätze mit der in der folgenden Tabelle genannten Zahl von Aufgaben:

Kursart	**GK**		**LK**	
CAS	**ohne CAS**	**mit CAS**	**ohne CAS**	**mit CAS**
Aufgabengruppe 1	***2***	***2***	***2***	***2***
Aufgabengruppe 2	***3***	***3***	***3***	***3***

- Bei den beiden Aufgabensätzen für den Grundkurs und den beiden Aufgabensätzen für den Leistungskurs sind je ein Aufgabensatz für die Nutzung eines wissenschaftlichen Taschenrechners und ein anderer für die Nutzung eines CAS vorgesehen.
- Die Aufgabengruppen 1 enthalten je zwei Aufgaben aus dem Bereich Analysis.
- Die Aufgabengruppen 2 enthalten jeweils
  - zwei Aufgaben aus dem Bereich Lineare Algebra/Geometrie, von denen eine Aufgabe die Alternative 1 und die andere die Alternative 2 für den Grund- bzw. Leistungskurs (siehe 2.1) berücksichtigt
  - eine Aufgabe aus dem Bereich Stochastik
- Die Fachlehrerin/der Fachlehrer stellt aus den übermittelten Aufgabensätzen die Prüfungsaufgabe nach folgenden Vorgaben zusammen:
  - Grundkurs: Die Prüfungsaufgabe wird aus 2 Aufgaben - jeweils eine aus jeder Aufgabengruppe - gebildet.
  - Leistungskurs: Die Prüfungsaufgabe wird aus 3 Aufgaben - mindestens eine aus jeder

Aufgabengruppe - gebildet.

Dabei ist die im Unterricht gewählte Alternative im Bereich der Linearen Algebra/ Geometrie (siehe Punkt 2.1) zu berücksichtigen.

Ebenso ist eine Entscheidung zu treffen, ob bei der Bearbeitung entsprechender Aufgaben ein wissenschaftlicher Taschenrechner oder ein CAS genutzt werden soll. Ein CAS-Aufgabensatz kann auch Aufgaben enthalten, für deren Lösung ein CAS nicht benötigt wird. Eine Kombination von Aufgaben aus einem CAS-Aufgabensatz mit Aufgaben aus dem anderen Satz ist nicht möglich.

- Eine Aufgabenauswahl durch die Schülerinnen und Schüler ist nicht vorgesehen.